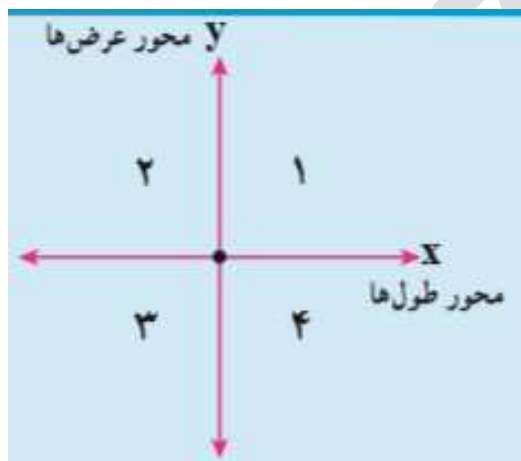


مفتصات

به نام خدا

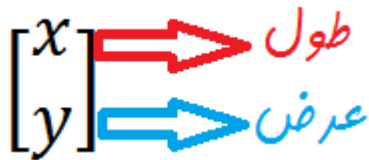
در این جلسه درباره محورهای مفتصات و مفتصات نقاط صحبت می‌کنیم.
محورهای مفتصات دو تا خط عمود بر هم هستن که صغفه رو به ۴ قسمت مساوی تقسیم میکنن.

حالا میفوییم بدونیم چرا ما از محورهای مفتصات استفاده می‌کنیم؟
چون با استفاده از این محورها می‌تونیم جای دقیق نقاط رو مشخص کنیم.
شکل زیر محورهای مفتصات رو نشون میده



در ادامه با این محورها بیشتر آشنا می‌شیم:

۱. مفتصات هر نقطه به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشون داده میشه، که X طول نقطه و y عرض نقطه هست.



۲. محور افقی ، محور طولها نام داره.

۳. نقاطی که در سمت راست محور مفتحات قرار دارن ، همگی دارای طول مثبت هستن. (بنابراین نقاطی که در نوای ۱ و ۴ هستن طولشون مثبت)

۴. نقاطی که در سمت چپ محور مفتحات قرار دارن ، همگی دارای طول منفی هستن. (بنابراین نقاطی که در نوای ۲ و ۳ هستن طولشون منفی)

۵. محور عمودی ، محور عرضها نام داره.

۶. نقاطی که در بالای محور مفتحات قرار دارن ، همگی دارای عرض مثبت هستن. (بنابراین نقاطی که در نوای ۱ و ۲ هستن عرضشون مثبت)

۷. نقاطی که در پایین محور مفتحات قرار دارن ، همگی دارای عرض منفی هستن. (بنابراین نقاطی که در نوای ۳ و ۴ هستن عرضشون منفی)

در اینجا دو تا از کاربردهای استفاده از محورهای مفتحات رو با هم می بینیم:

۱. مفتصات یه نقطه رو به ما میدن و ما باید اون رو روی محور نشون بدیم.

۲. یه نقطه رو روی محور به ما میدن و ما باید مفتصاتش رو مشخص کنیم.

نمایش نقطه روی
محور مفتصات

برای نمایش نقطه $[a]$ روی محور، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

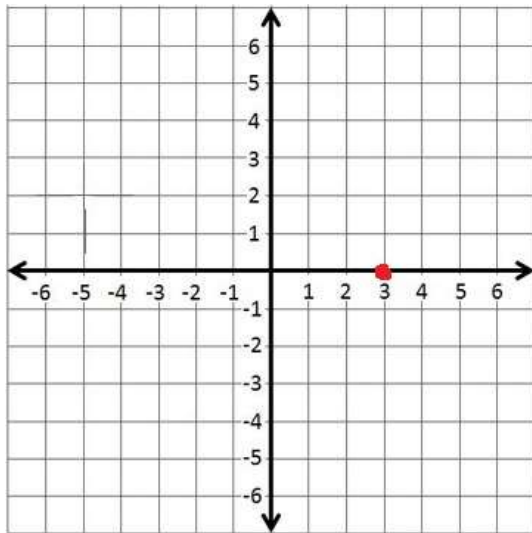
۱. اول نقطه بالایی رو نگاه می‌کنیم. اگه مثبت بود از مبدأ مفتصات به سمت به سمت راست و اگه منفی بود به سمت چپ حرکت می‌کنیم و همونجا وایمیسیم.
(تعداد فونه‌هایی که حرکت می‌کنیم به تعداد عددی هست که داریم)

۲. میریم سراغ عدد پایینی، اگه مثبت بود از همون نقطه ای که وایساده بودیم به سمت بالا حرکت می‌کنیم و اگه منفی بود به سمت پایین حرکت می‌کنیم. بجایی که میرسیم همون نقطه ای هست که از ما فواسته شده.

مثال:

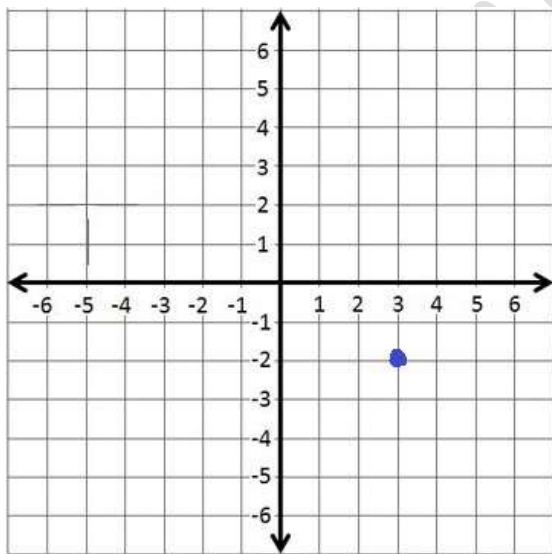
نقطه $[\begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}]$ را روی محور مفتصات نشان دهید.

۱. عدد بالایی رو نگاه می‌کنیم، چون مثبت، از مبدأ مفتصات ۳ واحد به سمت راست حرکت می‌کنیم، به اینجا می‌رسیم:



توجه داشته باشید که این نقطه، نقطه نهایی نیست.

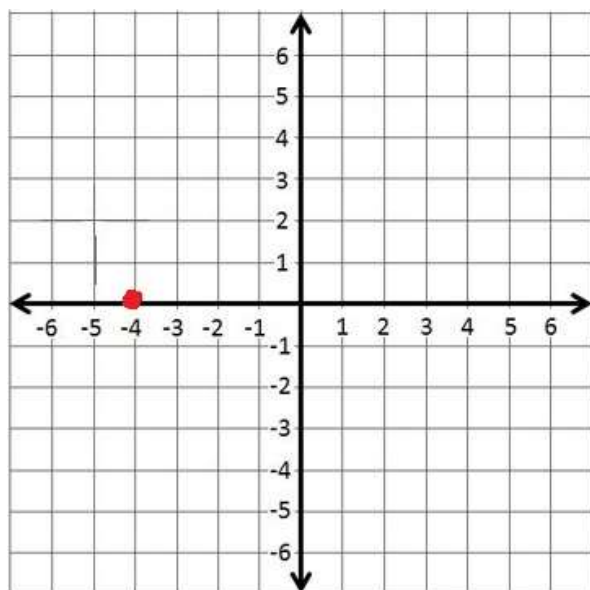
۲. عدد پایینی رو نگاه می‌کنیم، چون منفیه پس از نقطه ای که بودیم دو واحد به سمت پایین حرکت می‌کنیم، نقطه ای که در اینجا به دست میاد نقطه نهاییه:



مثال:

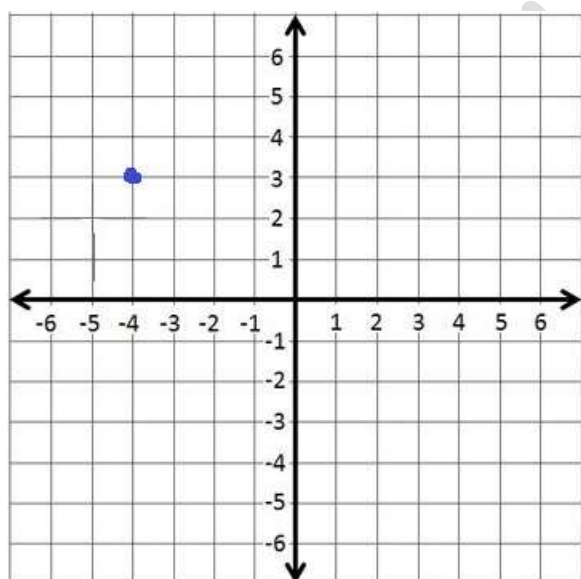
نقطه $\begin{bmatrix} -4 \\ +3 \end{bmatrix}$ را روی محور مفتحات نشان دهید.

۱. عدد بالایی رو نگاه می‌کنیم، چون منفیه، از مبدا مفتحات ۴ واحد به سمت چپ حرکت می‌کنیم، به اینجا می‌رسیم:



توجه داشته باشید که این نقطه، نقطه نهایی نیست.

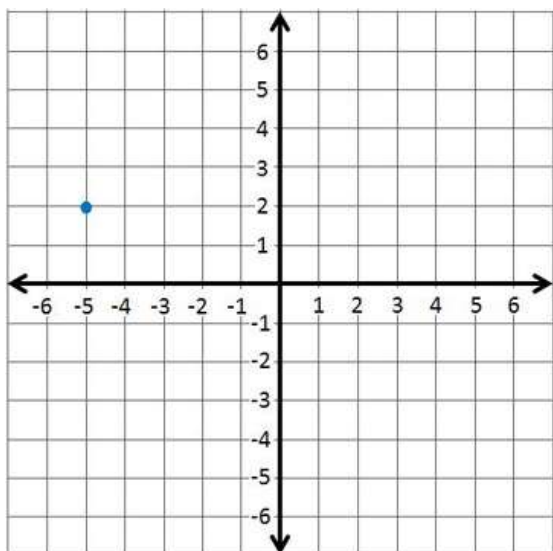
۲. عدد پایینی رو نگاه می‌کنیم، چون مثبت پس از نقطه ای که بودیم ۳ واحد به سمت بالا حرکت می‌کنیم، نقطه ای که در اینجا به دست میاد نقطه نهاییه:



تعیین مختصات یک

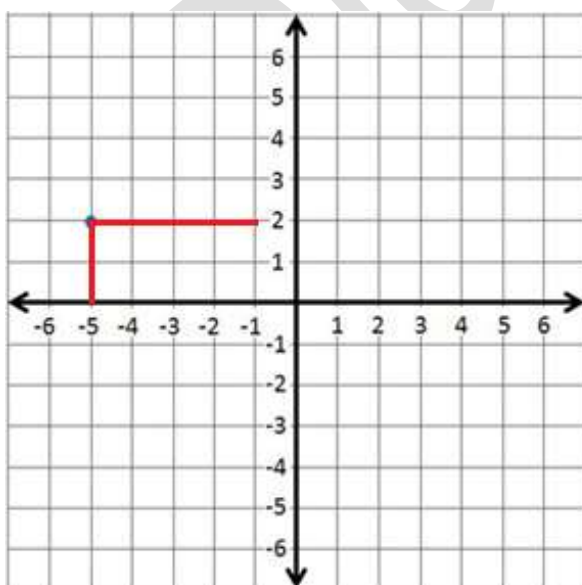
نقطه روی محور

فرض کنید که نقطه زیر رو روی محور به ما دادن و باید مختصاتش رو تعیین کنیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:



۱. نقطه داده شده رو با استفاده از دو تا خط به محورهای مختصات وصل می‌کنیم. به

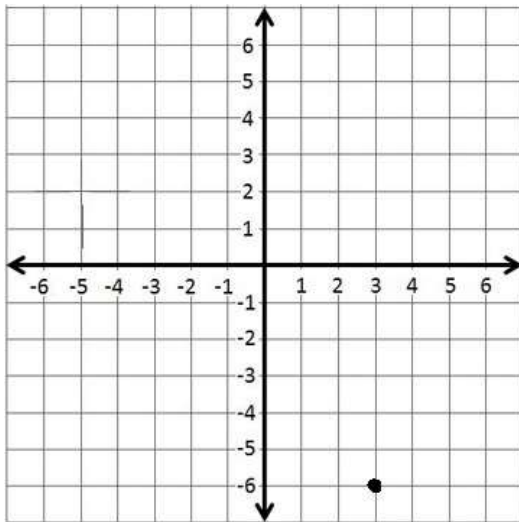
صورت زیر:



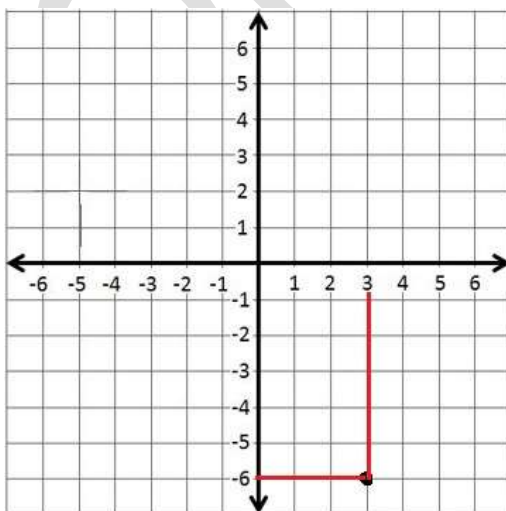
۲. دو تا خطی که رسم کردیم در دو نقطه محور طولها و عرضها رو قطع کردن. عددی که روی نقطه تقاطع با محور X هست رو بالا می‌نویسیم و عددی که روی نقطه تقاطع با محور Y ها هست رو پایین، بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

مثال: مختصات نقطه زیر را مشخص کنید:



۱. نقطه داده شده رو با استفاده از دو تا خط به محورهای مختصات وصل می‌کنیم. به صورت زیر:



۲. محور X ها رو در چه نقطه ای قطع میکنه؟ در نقطه $+3$. پس $+3$ رو باید بالا بنویسیم.

محور Y ها رو در چه نقطه ای قطع میکنه؟ در -6 . پس -6 رو پایین مینویسیم.
بنابراین مفتحات نقطه داده شده به صورت زیره:

[+3]
[-6]

مفتحات بردار

در قسمت قبل یاد گرفتیم که چطوری مفتحات یک نقطه رو روی محور مشخص کنیم. حالا می‌فوایم ببینیم برای نشون دادن یه بردار روی محور مفتحات باید چکار کنیم.
اگه نشون دادن نقاط روی محور رو یاد گرفته باشید، براحتی می‌تونید بردارها رو هم روی محور نمایش بدید.

برای نشون دادن یه بردار روی محور، اولین چیزی که نیاز داریم اینه که نقطه ابتدای بردار رو بدونیم.

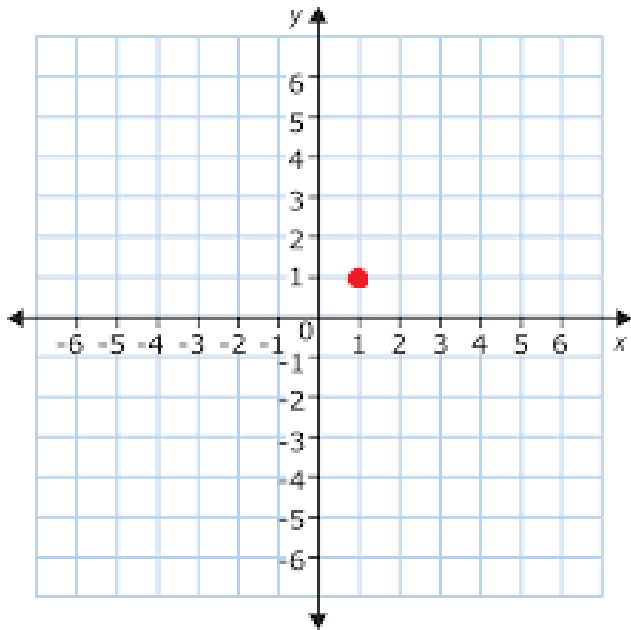
ممکنه یه بردار از مبدا مفتحات رسم شه، یعنی شروعش نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ باشه و ممکنه یه بردار شروعش یه نقطه دیگه باشه، مثلا نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

مثال :

بردار $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ را با شروع از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ رسم کنید.

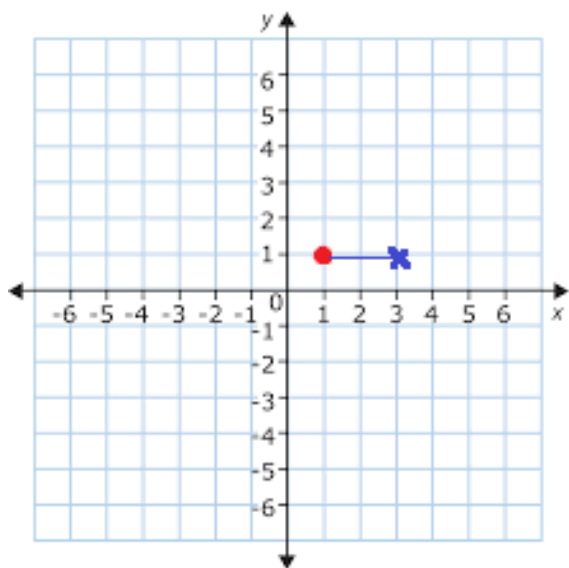
برای نمایش بردار روی محور به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱. ابتدا نقطه شروع رو علامت می‌زنیم.



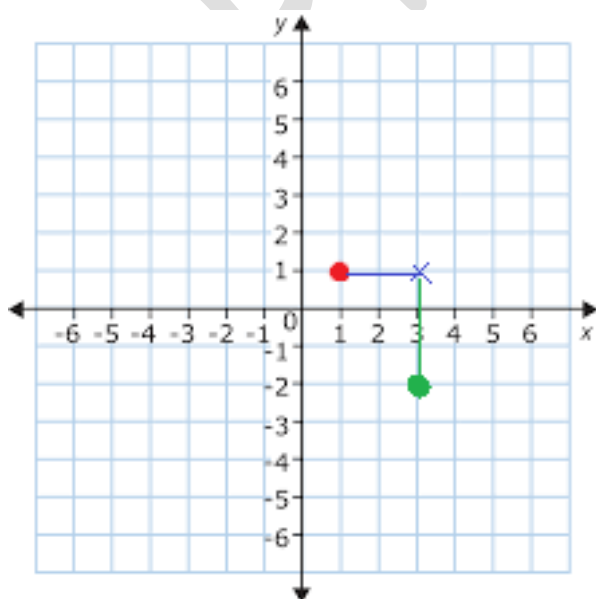
۲. از نقطه شروع، به تعداد اولین عدد مردمون (یعنی طول نقطه) به سمت راست یا چپ حرکت می‌کنیم. اگه مثبت بود به سمت راست و اگه منفی بود به سمت چپ حرکت می‌کنیم. توجه کنید که این جایی که ما می‌رسیم جواب نهایی نیست!

عدد اول یا همون طول، در اینجا عدد ۲ هست. پس ما باید از نقطه شروع، ۲ واحد به سمت راست حرکت کنیم (چون علامت ۲ مثبته)



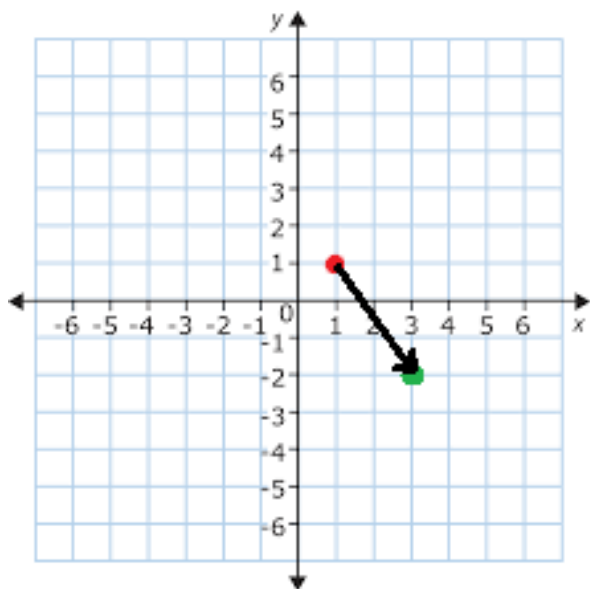
۳. از جایی که در اون قرار داریم (جایی که در مرحله ۲ بوش رسیدیم)، به تعداد عدد دو (یا همون عرض نقطه)، به سمت بالا یا پایین حرکت می‌کنیم. (اگه مثبت بود به سمت بالا و اگه منفی بود به سمت پایین میریم). این نقطه ای که می‌رسیم نقطه انتهای برداره.

عدد دو، یا همون عرض ما، در اینجا ۳- هست، بنابراین باید از نقطه ای که در اون قرار داریم، ۳ واحد به سمت پایین بیایم، **نقطه ای که بوش می‌رسیم، انتهای برداره:**



پس نقطه ای که بوش رسیدیم، یعنی نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، مفتصات نقطه انتهای برداره

۴. حالا دیگه با مسیری که طی کردیم کاری نداریم، فقط نقطه ابتدای بردار رو به نقطه انتهای بردار وصل می‌کنیم:



نکته مهمی که در اینجا وجود داره ارتباطیه که بین، مفتصات ابتدای بردار، مفتصات بردار و مفتصات انتهای بردار وجود داره و اون ارتباط به این صورته:

$$\text{مفتصات بردار} + \text{مفتصات ابتدای بردار} = \text{مفتصات انتهای بردار}$$

مثلا در مثال قبل:

$$\text{مفتصات ابتدای بردار} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{مفتصات بردار} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{مفتصات انتهای بردار} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

حالا ارتباط بین این نقاط رو می‌بینیم:

مفتصات انتهای بردار = مفتصات بردار + مفتصات ابتدای بردار

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

این رابطه برای ما به رابطه مهمه، مثلا با استفاده از این رابطه می‌تونیم مثال قبل رو راحتتر حل کنیم، چطور؟

ما با داشتن نقاط ابتدایی و انتهایی بردار، براحتی می‌تونیم اونو رسم کنیم

صورت سوال، نقطه **ابتدای بردار** رو به ما داده

با جمع نقطه ابتدای بردار و مفتصات بردار هم با استفاده از رابطه بالا می‌تونیم نقطه **انتهای بردار** رو به دست بیاریم.

حالا تنها کاری که باید انجام بدیم اینه که این دو نقطه رو روی محور نشون بدیم و به هم وصل کنیم.

یه مثال دیگه برای استفاده از این رابطه رو با هم می‌بینیم:

مثال:

اگر $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ مفتصات ابتدای بردار و $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ مفتصات انتهای بردار باشد، مفتصات بردار را

به دست آورید.

ما می‌دونیم که

مفتصات انتهای بردار = مفتصات بردار + مفتصات ابتدای بردار

در اینجا چیزی که برای ما مجهوله، مفتصات برداره، پس به جای مفتصات بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ رو

قرار میدیم تا مقدار x و y رو به دست بیاریم:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حالا برای هر قسمت به معادله تشکیل میدیم:

$$2 + x = 5$$

حالا به راحتی X به دست میاد:

$$x = 5 - 2 = 3$$

برای به دست آوردن Y هم داریم:

$$1 + y = -1$$

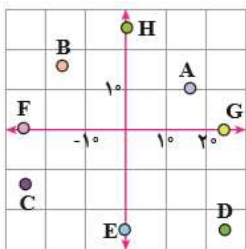
$$y = -1 - 1 = -2$$

بنابراین مقدمات بردار برابر با:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

حل تمرین صفحه ۱۰۶

مقدمات



۱- با توجه به شکل مقدمات هر نقطه را به صورت تقریبی بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن مفتصات یه نقطه روی محور، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

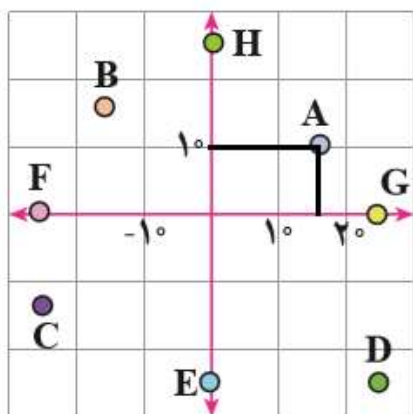
۱. نقطه داده شده رو با استفاده از دو تا خط به محورهای مفتصات وصل می‌کنیم.

۲. دو تا خطی که رسم کردیم در دو نقطه محور طولها و عرضها رو قطع کردن. عددی

که روی نقطه تقاطع با محور X هست رو بالا می‌نویسیم و عددی که روی نقطه

تقاطع با محور Y ها هست رو پایین.

نقطه A:

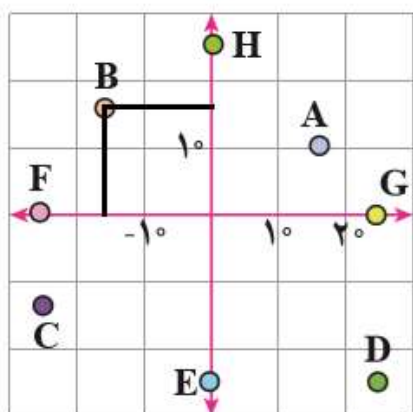


خطی که با محور X برخورد کرده، تقریباً در نقطه ۱۷ این محور رو قطع کرده.

خطی که با محور Y برخورد کرده، در نقطه ۱۰ این محور رو قطع کرده.

بنابراین مفتصات نقطه A برابر با: $\begin{bmatrix} 17 \\ 10 \end{bmatrix}$

نقطه B:



خطی که با محور X برخورد کرده، تقریباً در نقطه -۱۷ این محور رو قطع کرده.

خطی که با محور Y برخورد کرده، در نقطه ۱۷ این محور رو قطع کرده.

بنابراین مفتصات نقطه B برابر با: $\begin{bmatrix} -17 \\ 17 \end{bmatrix}$

به همین ترتیب مفتصات بقیه نقاط رو هم به دست میاریم:

$$C = \begin{bmatrix} -25 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 25 \\ -25 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \end{bmatrix}$$

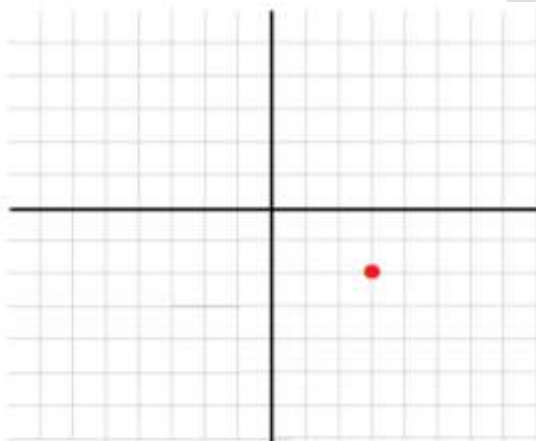
$$F = \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

۲- بردار $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ را در محور مختصات زیر طوری رسم کنید که ابتدای بردار نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

باشد.

مختصات نقطه انتهای آن را بنویسید.

نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ که قراره ابتدای بردار باشه، روی محور مشخص می‌کنیم:



حالا می‌خوایم از این نقطه، بردار $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ رو

رسم

کنیم.

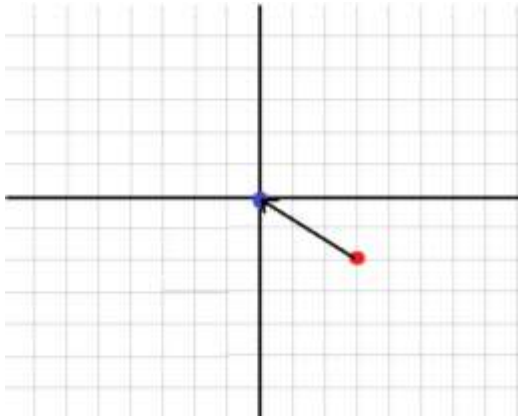
پس از این نقطه، ۳ تا به سمت چپ حرکت

می‌کنیم و دو تا به سمت بالا، نقطه‌ای که بهش می‌رسیم انتهای برداره. ابتدا رو به انتها

وصل می‌کنیم تا بردار به دست بیاد.

(چون طول منفیه باید به سمت چپ حرکت کنیم، چون عرض مثبتیه باید به سمت بالا

حرکت کنیم).



همینطور که می بینیم، مفتحات انتهای بردار نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ هست.

ادامه تمرینها رو می تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

انتقال

برای انتقال یک شکل با استفاده از یه بردار، به دو روش می تونیم عمل می کنیم؛
 در روش اول مستقیما از شکل برای انتقال استفاده می کنیم. به صورت زیر:
 ۱. نقطه های اصلی شکل رو علامت می زنیم، مثلا آگه مثلث داشتیم راسهاش رو علامت می زنیم.

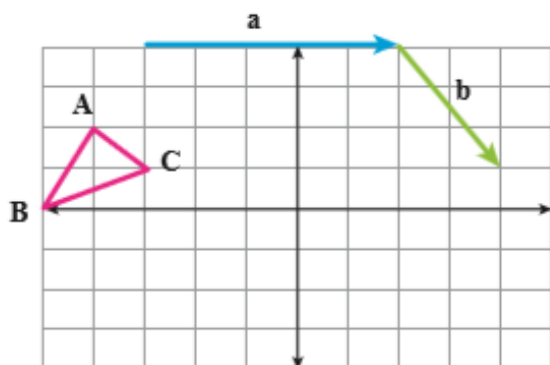
۲. این نقاط رو با استفاده از بردار انتقال، انتقال میدیم.

۳. با وصل کردن این نقاط، شکل انتقال یافته به دست میاد.

هالا اون نقطه ها رو بطوری انتقال بدیم!!!

اول باید ببینیم بردار انتقال چند تا افقی و چند تا عمودی حرکت کرده. مثلا میگیریم بردار انتقال ۳ تا به سمت راست و ۲ تا به سمت پایین حرکت کرده

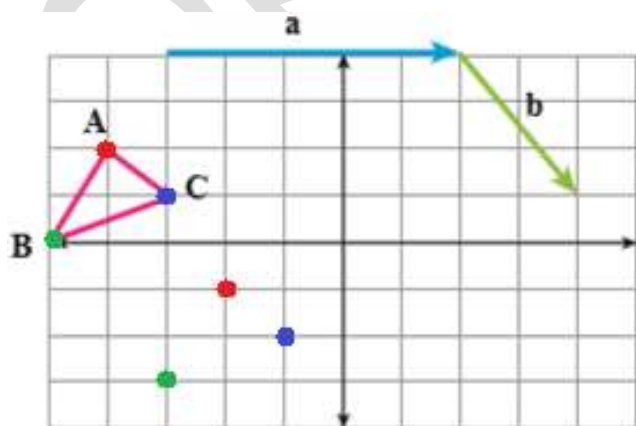
حالا اون نقطه رو هم ۳ تا به سمت راست و ۲ تا به سمت بالا حرکت میدیم تا جای جدیدش مشخص بشه.



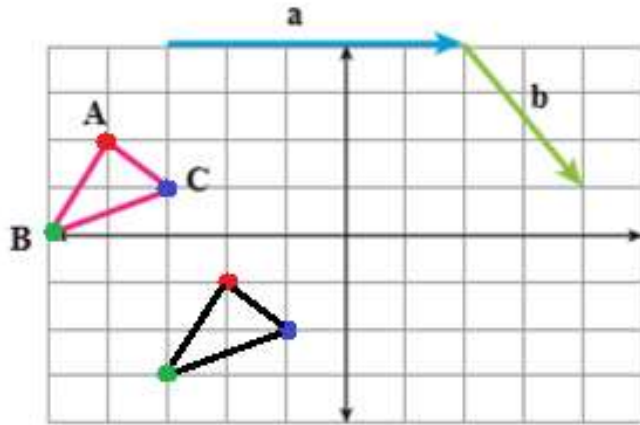
فرض کنید این مثلث رو میفویایم با بردار b انتقال بدیم. اول رفتار بردار رو تعیین می‌کنیم:

بردار انتقال، دو تا به سمت راست و سه تا به سمت پایین حرکت کرده

پس نقاط A و B و C رو دو تا به سمت راست و سه تا به سمت پایین حرکت میدیم:



حالا این نقاط رو بهم وصل می‌کنیم تا شکل منتقل شده به دست بیاد:



روش دوم به صورت زیره:

گام ۱. ابتدا مختصات نقاط اصلی شکل رو مشخص می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} -4 \\ +2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

گام ۲. مختصات بردار انتقال رو تعیین می‌کنیم.

در این شکل مختصات بردار b رو باید به دست بیاریم.

بردار b دو تا به سمت راست حرکت کرده پس طولش برابر $+۲$ هست.

بردار b سه تا به سمت پایین حرکت کرده پس عرضش برابر -۳ هست.

بنابراین مختصات بردار b برابره با:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

گام ۳. تک تک نقاط رو با بردار انتقال جمع می‌کنیم تا نقاط جدید به دست

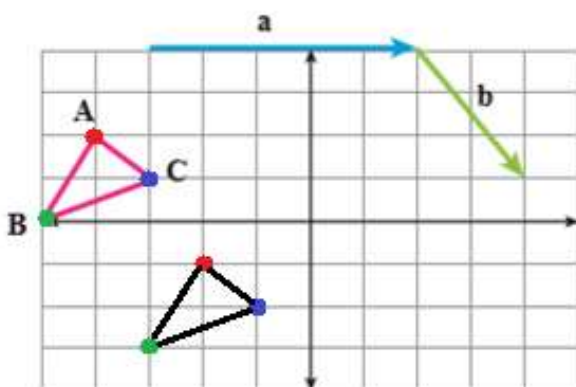
بیان

$$A' = \begin{bmatrix} -4 \\ +2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

گام ۴. این نقاط رو روی محور مشخص می‌کنیم و به هم وصل می‌کنیم تا شکل انتقال یافته به دست بیاد:

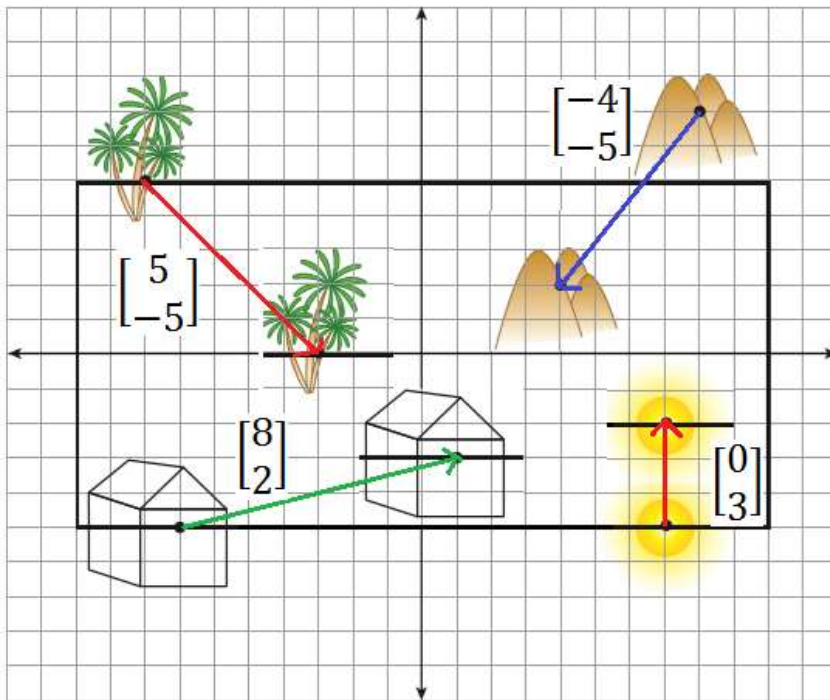


حل تمرین صفحه ۱۰۹

بردار انتقال

۱- هر یک از اجزای نقاشی را با بردار انتقال دلخواه به محل مناسب در

کادر انتقال دهید و مختصات بردار انتقال را بنویسید.

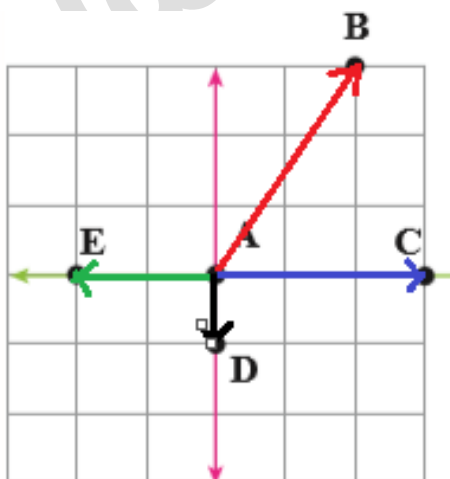


۲- مسیر حرکت از A به B، به C، به D و به E را با بردارهای انتقال مشخص کنید و مختصات هر

بردار را بنویسید.

می توانید این بازی را به صورت دو نفره انجام دهید. یک نفر نقطه می گذارد و نفر دوم باید بگوید با چه

بردار انتقالی نقطه شروع را به نقطه مشخص شده، انتقال می دهد.



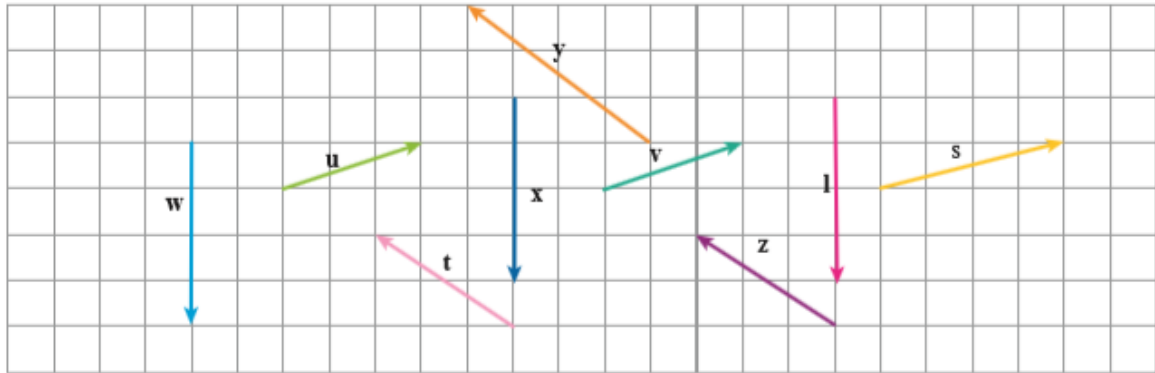
$$AB = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AD = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$AE = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۳- بردارهای مساوی را مشخص کنید.



دو بردار زمانی مساوی هستند که هم اندازه، هم راستا و هم جهت باشند. بنابراین:

$$W = X = I$$

$$U = V$$

$$T = Z$$

ادامه تمرینها رو می تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید 😊

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانالهای @RiaziBaHam و @RiaziBaHam7

برای دریافت جزوات سایر پایه ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.